Даутов Р.З., Карчевский Е.М. (Казань)

Вопросы существования и численные методы в спектральной теории слабонаправляющих диэлектрических волноводов

1 Введение

Исследование спектральных задач теории диэлектрических волноводов и разработка численных методов их решения привлекают большое внимание (см., например, [1]-[4] и цитированную там литературу).

Традиционный подход к изучению цилиндрических волноводов основывается на определении их собственных волн: электромагнитных волн вида $\Phi(x)\exp(i(\omega t - \beta z))$, где x - вектор поперечных координат, z - продольная координата, β - продольная постоянная распространения, ω - частота колебаний по времени t. Особенный интерес представляют поверхностные волны: их амплитуда $\Phi(x)$ экспоненциально стремится к нулю при $|x| \to \infty$, а постоянная распространения β - вещественное число.

Для волноводов со слабо меняющейся по сечению диэлектрической проницаемостью широкое распространение получило "приближение слабонаправляющего волновода" [2], которое приводит к скалярной параметрической задаче на собственные значения для уравнения Гельмгольца на плоскости. В качестве искомых параметров здесь выступают $\lambda = \omega^2$ и $\mu = \beta^2$.

Хорошо известно точное решение этой задачи для однородного волновода кругового поперечного сечения [2]: получено трансцендентное алгебраическое (характеристическое) уравнение, связывающее λ и μ. На практике используется большой диапазон волноводов (однородные волокна произвольной геометрии, волокна с переменной по сечению диэлектрической проницаемостью, волноводы, состоящие из двух и более параллельных волокон), для которых нельзя получить точных решений. Для ряда конкретных волноведущих структур получены приближенные решения (см., например [2]). Разработано большое количество различных численных методов (см., например, обзоры [3], [4]). В

[5] - [7] предложен и исследован метод расчета однородных волноводов с произвольным контуром поперечного сечения, основанный на эквивалентном сведении методом контурных интегральных уравнений исходной задачи к нелинейной спектральной задаче для фредгольмовой голоморфной оператор-функции.

Задачи в неограниченных областях часто возникают в различных областях приложений, таких как акустика, электромагнетизм, аэродинамика, геофизика, подземная гидромеханика, метеорология и т.д.. Существуют различные подходы для приближенного решения таких задач. Один из наиболее распространенных подходов базируется на реализации следующих четырех шагов:

1. введение искусственной границы Γ, разбивающей исходную область на две части: конечную расчетную область Ω и и неограниченную область Ω_∞;
2. постановка некоторых краевых условий на Γ (обеспечивающих, в частности, корректность задачи в области Ω);
3. решение задачи в ограниченной области Ω каким-либо численным методом;
4. нахождение решения в области Ω_∞ (если это необходимо).

Наиболее ответственным в этом подходе является второй шаг; искусственное краевое условие должно быть достаточно точным и простым, чтобы обеспечить успех метода. Особенно это важно при решении волновых задач (проблема постановки прозрачных, не отражающих краевых условий).

Стандартный и часто используемый способ постановки краевых условий на Γ - это просто перенос их с бесконечности. Однако этот подход не во всех задачах и не всегда является эффективным, поскольку в этом случае область Ω с необходимостью должна выбираться достаточно "большой", что приводит к конечномерной задаче большой размерности.

Большинство из предложенных краевых условий на искусственной границе являются локальными и приближенными [8]. Более привлекательными являются точные нелокальные условия, среди которых отметим постановки на основе интегральных уравнений. Это условие имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon} = -S_\Gamma u,$$

где υ - единичный вектор внешней относительно области Ω нормали к Γ, S_Γ – неявно заданный нелокальный оператор, для вычисления которого требуется решение некоторого интегрального уравнения на Γ. В связи с этим отметим работы [9] – [13], посвященные комбинированию метода конечных элементов и граничных интегральных уравнений. Относительно исходной задачи в этом методе предполагается, что у уравнения в области Ω_∞ известно фундаментальное решение. Недостатком этого метода является неявность задания оператора S_Γ и достаточная сложность его вычисления.

Указанного недостатка лишен метод, предложенный в [14], в котором контур Γ выбирается специальным образом так, что исходная задача в области Ω_∞ при известном на границе Γ решении может быть решена точно методом Фурье (методом разделения переменных), например, в виде окружности (эллипса) в двумерном случае или сферы - в трехмерном. Дифференцированием найденного решения и определяется оператор S_Γ. Метод прост в реализации и, как показывают теоретические оценки и вычислительные эксперименты, является очень эффективным.

Далее будет показано применение этого метода для численного решения задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов методом конечных элементов.

Кроме того, в данной статье мы представляем полный теоретический анализ существования поверхностных волн слабонаправляющих диэлектрических волноводов произвольной геометрии и распределения диэлектрической проницаемости, охватывающий большинство практически интересных случаев.

Распространенным методом исследования существования решений спектральных задач в неограниченных областях является использование спектральной теории неограниченных операторов. На этом пути удалось получить ряд интересных результатов (см., например, [15] – [17]). В частности, в работе [15] изучены те же вопросы, касающиеся существования решений, которые рассматриваем и мы в настоящей статье, но в векторном случае. Описанный выше подход сведения исходной задачи на плоскости к задаче в ограниченной области с нелокальным краевым условием на ее границе позволяет нам использовать результаты теории самосопряженных компактных операторов в гильбертовом пространстве для исследования существования ее решений. Эта методика, на наш взгляд, является не только более конструктивной с практической точки зрения, но и приводит к новым результатам по сравнению, с полученными при помощи техники неограниченных операторов. Так, например, нам удается построить достаточно простые уравнения, определяющие количество решений задачи (уравнения отсечки).

2 Формулировка задачи

Задача о собственных поверхностных волнах слабонаправляющего диэлектрического волновода состоит в отыскании таких положительных значений параметров λ и μ, при которых существуют экспоненциально убывающие на бесконечности нетривиальные решения u следующей задачи [2]:

$$-\Delta u + \mu u = \lambda \varepsilon u, \; x \in \Omega_i \cup \Omega_e, \tag{1}$$

$$[u]_\gamma = 0, [u_v]_\gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon(x)$ - диэлектрическая проницаемость волновода и окружающей среды при $x \in \Omega_i$ и $x \in \Omega_e$ соответственно, $\varepsilon(x) = \varepsilon_\infty = const$ в Ω_e, $\lambda = \omega^2$, ω - частота электромагнитных колебаний, $\mu = \beta^2$, β - продольная постоянная распространения, u_v - производная по внешней нормали к границе γ ограниченной, не обязательно связной, области Ω_i на плоскости R^2, $\Omega_e = R^2 \setminus \Omega_i$, $[u]_\gamma$ - скачок функции на контуре γ .

Будем считать, что начало координат лежит в Ω_i, $\varepsilon \in C(\bar{\Omega}_i)$, каждая связная компонента границы γ является липшицевой кривой,

$$\min_{x \in \Omega_i} \varepsilon(x) \geq \varepsilon_\infty, \; \varepsilon_+ = \max_{x \in \Omega_i} \varepsilon(x) > \varepsilon_\infty > 0. \tag{3}$$

Задача (1), (2) представляет собой параметрическую задачу на собственные значения. Можно принять μ за параметр, а λ за собственное значение и изучить поведение функции $\mu \to \lambda(\mu)$. Именно так мы и поступим в настоящей работе. Оба подхода эквивалентны. Далее мы покажем, что отображение $\mu \to \lambda(\mu)$ является взаимно однозначным.

Укажем простые ограничения на параметры λ и μ. Если u – классическое решение задачи (1), (2) при некоторых λ и μ, то в области Ω_e справедливо уравнение

$$-\Delta u + (\mu - \lambda\varepsilon_\infty)u = 0, \ x \in \Omega_e.$$

Оно имеет экспоненциально убывающее на бесконечности решение только тогда, когда [18],

$$\lambda < \frac{\mu}{\varepsilon_\infty} = \lambda_+(\mu).$$

Далее, умножая уравнение (1) на функцию u и интегрируя по $x \in R^2$, получим соотношение, из которого следует, что $\lambda > \mu/\varepsilon_+ = \lambda_-(\mu)$. Таким образом, условие

$$(\mu, \lambda) \in \Lambda, \ \Lambda = \bigcup_{\mu>0} \Lambda_\mu, \ \Lambda_\mu = (\lambda_-(\mu), \lambda_+(\mu)) \qquad (4)$$

является необходимым для разрешимости задачи (1), (2), и далее мы всегда будем предполагать его выполненным.

3 Эквивалентные определения обобщенного решения

Дадим два определения обобщенного решения поставленной задачи. Первое из них является традиционным и используется нами для установления свойств собственных функций. Второе определение позволит нам на основе теории самосопряженных компактных операторов в гильбертовом пространстве установить разрешимость задачи.

3.1 Обобщенное решение в неограниченной области

Введем пространство Соболева $H^1 = W_2^1(R^2)$ с нормой

$$\|u\|^2_{1,R^2} = \int\limits_{R^2} (u^2 + |\nabla u|^2)\, dx.$$

Рассмотрим задачу: *найти все такие пары $(\mu, \lambda) \in \Lambda$, при которых существуют функции $u \in H^1 \backslash \{0\}$, удовлетворяющие для любой функции $v \in H^1$ тождеству*

$$(P_1) \quad \int_{R^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \mu uv)\, dx = \lambda \int_{R^2} \varepsilon uv\, dx.$$

Если (μ, λ, u) является решением задачи (1), (2), то справедливо тождество (P_1). В этом легко убедиться, если умножить уравнение (1) на произвольную функцию $v \in H^1$ и воспользоваться формулой интегрирования по частям. Верно и обратное утверждение. Выбирая в (P_1) функцию v с носителем в Ω_i (Ω_e), получаем, что уравнение (1) в области Ω_i (Ω_e) удовлетворяется в смысле распределений, а, следовательно, в силу регулярности решений краевых задач, и в классическом смысле. Выбирая функцию v произвольной на γ, получаем второе равенство в (2). Равенство $[u]_\gamma = 0$ справедливо для любой функции $u \in H^1$. Далее, поскольку функция u удовлетворяет уравнению $-\Delta u + (\mu - \lambda\varepsilon_\infty)u = 0$, $x \in \Omega_e$, то она является экспоненциально убывающей на бесконечности в силу условия $(\mu, \lambda) \in \Lambda$.

3.2 Обобщенное решение в ограниченной области

Обозначим через Ω открытый круг радиуса R такой, что $\Omega_i \subset \Omega$, $\Gamma = \partial\Omega$ - граница Ω и пусть $\Omega_\infty = R^2 \backslash \Omega_i$. Введем пространства $V = W_2^1(\Omega)$, $V_\infty = W_2^1(\Omega_\infty)$, $V_\infty^0 = \{v \in V_\infty : v|_\gamma = 0\}$. Через $(\cdot, \cdot)$ обозначим скалярное произведение в V.

Тождество (P_1) представим в виде

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + \mu uv)\, dx + \int_{\Omega_\infty} (\nabla u \cdot \nabla v + \sigma^2 uv)\, dx = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon uv\, dx, \quad (5)$$

где $\sigma = \sqrt{\mu - \lambda\varepsilon_\infty}$, v произвольная функция из H^1. Выбирая здесь v тождественно равной нулю в Ω, получим

$$\int_{\Omega_\infty} (\nabla u \cdot \nabla v + \sigma^2 uv)\, dx = 0 \quad (6)$$

для любой функции v из V_∞^0. При фиксированном $\sigma > 0$ и заданном следе u на Γ тождество (6) можно рассматривать как уравнение, позволяющее определить специальное (метагармоническое) продолжение u с Γ в неограниченную область Ω_∞. Для произвольно заданной функции $u \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ через $u_\sigma \in V_\infty$ обозначим ее метагармоническое продолжение в область Ω_∞. Очевидно, указанное продолжение существует при $\sigma > 0$, определяется единственным образом и, кроме того,

$$\int\limits_{\Omega_\infty} (|\nabla u_\sigma|^2 + \sigma^2 u_\sigma^2)\, dx = \inf_{v \in V_\infty, v|_\Gamma = u} \int\limits_{\Omega_\infty} (|\nabla v|^2 + \sigma^2 v^2)\, dx. \quad (7)$$

Введем оператор $S_\Gamma(\sigma) : V \to V$,

$$(S_\Gamma(\sigma)u, v) = \int\limits_{\Omega_\infty} (\nabla u_\sigma \cdot \nabla v_\sigma + \sigma^2 u_\sigma v_\sigma)\, dx,$$

где u и v – произвольные функции из V, u_σ и v_σ – метагармонические продолжения в область Ω_∞ следов функций u и v на Γ.

Ограничиваясь в тождестве (5) только такими функциями v, которые допускают метагармоническое продолжение с контура Γ в область Ω_∞, и учитывая, что $u = u_\sigma$ в Ω_∞, получаем, что решение задачи (P_1) удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + \mu uv)\, dx + (S_\Gamma(\sigma)u, v) = \lambda \int\limits_{\Omega} \varepsilon uv\, dx \quad \forall v \in V. \quad (8)$$

Очевидно, верно и обратное утверждение. Пусть (μ, λ, u) удовлетворяет тождеству (8). Осуществим метагармоническое продолжение функции u с области Ω в Ω_∞. Полученную функцию, определенную в R^2, обозначим опять через u. Очевидно, $u \in H^1$. Тогда из (8) приходим к (5), если воспользоватся определением формы $(S_\Gamma(\sigma)u, v)$ и тем, что

$$\int\limits_{\Omega_\infty} (\nabla u_\sigma \cdot \nabla v_\sigma + \sigma^2 u_\sigma v_\sigma)\, dx = \int\limits_{\Omega_\infty} (\nabla u_\sigma \cdot \nabla v + \sigma^2 u_\sigma v)\, dx \;\; \forall v \in H^1.$$

В дальнейшем эквивалентность задач (P_1) и (8) будем понимать именно в указанном смысле.

3.3 Явный вид оператора $S_\Gamma(\sigma)$

Область Ω была выбрана в виде круга радиуса с центром в нуле для того, чтобы можно было получить явное представление $S_\Gamma(\sigma)$.

Лемма 1 $S_\Gamma(\sigma)$ *самосопряженный оператор.*

Поскольку оператор $S_\Gamma(\sigma)$ непрерывен, а множество бесконечно-дифференцируемых функций плотно в V, то достаточно определить $S_\Gamma(\sigma)$ лишь на гладких функциях. Интегрированием по частям убеждаемся, что для его определения нам необходимо найти такую функцию $u_\sigma \in V_\infty$, что

$$-\Delta u_\sigma + \sigma^2 u_\sigma = 0,\ x \in \Omega_\infty, \quad u_\sigma = u(R,\varphi),\ x \in \Gamma,$$

и положить

$$(S_\Gamma(\sigma)u, v) = -\int\limits_\Gamma \frac{\partial u_\sigma}{\partial r}\, v\, d\varphi.$$

Здесь (r,φ) полярные координаты точки x. Решение этой задачи легко находится с помощью метода разделения переменных и имеет вид

$$u_\sigma(r,\varphi) = {\sum_{n=0}^{\infty}}' \frac{K_n(\sigma r)}{K_n(\sigma R)} \left(a_n(u)\cos(n\varphi) + b_n(u)\sin(n\varphi)\right),$$

где для $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_n(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(R,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi,\ b_n(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(R,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi,$$

$K_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя порядка n, штрих у суммы означает, что нулевой член умножается на 0.5. Следовательно,

$$\left.\frac{\partial u_\sigma}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{1}{R}{\sum_{n=0}^{\infty}}' H_n(\sigma R)\left(a_n(u)\cos(n\varphi) + b_n(u)\sin(n\varphi)\right),$$

$$H_n(z) = -z\frac{K_n'(z)}{K_n(z)}.$$

Известно, что модифицированные функции Бесселя $K_n(z)$ положительны при вещественных $z > 0$, $n > 0$, а также

$$K_n'(z) = -K_{n-1}(z) - \frac{n}{z}K_n(z),\ n \geq 1,\ K_0'(z) = -K_1(z).$$

Отсюда следует другая формула для вычисления функций $H_n(z)$ и их положительность:

$$H_n(z) = n + z\frac{K_{n-1}(z)}{K_n(z)} > 0,\ n \geq 1, \quad H_0(z) = z\frac{K_1(z)}{K_0(z)} > 0.$$

Из полученных соотношений следует искомая формула

$$(S_\Gamma(\sigma)u, v) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' H_n(\sigma R)\left(a_n(u)a_n(v) + b_n(u)b_n(v)\right).$$

3.4 Операторная формулировка задачи

Определим для всех пар $(\mu, \lambda) \in \Lambda$, операторы A_0, $S(\sigma)$, B_0, B : $V \to V$:

$$(A_0u, v) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n(u)a_n(v) + b_n(u)b_n(v)\right),$$

$$(S(\sigma)u, v) = \frac{\sigma \mathrm{R}}{2}\frac{\mathrm{K}_1(\sigma R)}{\mathrm{K}_0(\sigma R)}a_0(u)a_0(v) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \sigma R\frac{K_{n-1}(\sigma R)}{K_n(\sigma R)}\left(a_n(u)a_n(v) + b_n(u)b_n(v)\right),$$

$$(B_0u, v) = \int\limits_\Omega uv\, dx, \quad (Bu, v) = \int\limits_\Omega \varepsilon uv\, dx,$$

где u, v произвольные функции из пространства V, $\sigma = \sqrt{\mu - \lambda\varepsilon_\infty}$. Задача (8) может быть сформулирована теперь следующим образом: *найти все такие пары $(\mu, \lambda) \in \Lambda$, при которых существуют нетривиальные решения задачи*

$$(P_2) \qquad A_\mu(\lambda)u = \lambda Bu, \quad A_\mu(\lambda) = A_0 + \mu B_0 + S(\sigma).$$

Отметим существенные для нас свойства операторов задачи (P_2).

Лемма 2 *Операторы* A_0, $S(\sigma)$, B_0, B *являются самосопряженными. Кроме того,*

1. $A_0 \geq 0,\ S(\sigma) \geq 0,\ B_0 > 0,\ B > 0$;

2. $S(\sigma),\ B_0,\ B$ *– компактные операторы;*

3. *при любом* $\sigma > 0$ *оператор-функция* $S(\sigma)$ *непрерывно дифференцируема,* $\|S(\sigma)\| \to 0$ *при* $\sigma \to 0$;

4. $\|A_\mu(\lambda) - A_\mu(\eta)\| \to 0$ *при* $\lambda \to \eta,\ \lambda, \eta \in \Lambda_\mu$;

5. $(A_\mu(\lambda)u, u) \geq (A_\mu(\eta)u, u)$ *при* $\lambda \leq \eta,\ \lambda, \eta \in \Lambda_\mu,\ u \in V$.

Утверждения леммы легко доказываются, если воспользоваться следующей эквивалентной нормировкой пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$ (см., напр., [19, с.29]),

$$\|u\|^2_{1/2,\Gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(a_n^2(u) + b_n^2(u)\right),$$

компактностью вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, и свойствами функций Бесселя.

4 Существование решений задачи

Обозначим через μ_k собственные числа задачи

$$A_0 u = \mu C u, \quad C = \frac{1}{\varepsilon_\infty} B - B_0, \tag{9}$$

занумерованные с учетом кратности:

$$0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \ldots, \mu_n \to \infty, n \to \infty.$$

Уравнение (9) будем называть уравнением отсечки, а собственные значения μ_k – точками отсечки. Эти понятия имеют фундаментальное значение для рассматриваемой нами задачи.

Для $\mu > 0$ определим целочисленную функцию

$$n(\mu) = \max\{k : \mu_k < \mu\}. \tag{10}$$

Следующая теорема описывает все множество решений задачи (P_2).

Теорема 1 *Пусть μ_k – точки отсечки, функция $n(\mu)$ определена формулой (10). Тогда для любого $\mu > 0$ задача (P_2) имеет ровно $n(\mu)$ решений $(\mu, \lambda_i(\mu), u_i(\mu))$,*

$$\lambda_-(\mu) < \lambda_1(\mu) \le \lambda_2(\mu) \le \ldots \le \lambda_{n(\mu)}(\mu) < \lambda_+(\mu)$$

Если $\lambda_{k-1}(\mu) < \lambda_k(\mu) = \lambda_{k+1}(\mu) = \ldots = \lambda_{k+m-1}(\mu) < \lambda_{k+m}(\mu)$, то собственные функции $u_i(\mu)$, $i = k, \ldots, k+m-1$, могут быть выбраны ортонормированными. Каждое число $\lambda = \lambda_k(\mu)$, $k \ge 1$, является единственным корнем уравнения

$$\lambda = \min_{H_k \subset V} \max_{v \in H_k} R_\mu(\lambda, v), \quad R_\mu(\lambda, u) = \frac{(A_0 u + \mu B_0 u + S(\sigma)u, u)}{(Bu, u)}.$$

При фиксированном μ задача (P_2) представляет собой симметричную задачу на собственные значения вида

$$A(\lambda)u = \lambda Bu, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{11}$$

в которую спектральный параметр $\lambda \in \Lambda_\mu$ входит нелинейно. Исследование существования решений задачи такого вида мы основываем на изучении зависимости собственных значений γ обычной симметричной спектральной задачи $A(\lambda)u = \gamma Bu$ от параметра λ и разрешимости уравнения $\gamma(\lambda) = \lambda$ [20]. Ключевую роль в анализе играет монотонность и непрерывность оператор-функции $A(\lambda)$. В конечномерном случае задача такого типа была рассмотрена в [21], аналогичная абстрактная задача в [22].

Как следует из теоремы, при любом $\mu > 0$ задача (P_2), следовательно, и исходная задача (P_1), всегда имеет по крайней мере одно решение, а число всех решений увеличивается с ростом μ и стремится к бесконечности при $\mu \to \infty$. Для каждого конечного значения $\mu > 0$ имеется не более конечного числа решений.

Функции $\mu \to \lambda_k(\mu)$ называются дисперсионными кривыми и являются основными неизвестными задачи. Следующая теорема описывает их свойства.

Теорема 2 *При всех $k \ge 1$ дисперсионные кривые $\lambda = \lambda_k(\mu)$, определенные на (μ_k, ∞), являются липшицевыми, возрастающими и*

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{\lambda_k(\mu)}{\mu} = \frac{1}{\varepsilon_+}$$

Предыдущие утверждения содержали мало информации о собственных функциях задачи (P_2). Необходимую информацию легко получить, если воспользоваться теоремой 1 и эквивалентностью задач (P_2) и (P_1).

Пусть $(\lambda_k(\mu), u_k(\mu))$ – решения задачи (P_2) при фиксированном μ. Осуществим метагармоническое продолжение функции $u_k(\mu)$ с области Ω в Ω_∞. Полученную функцию, определенную в R^2, обозначим через $u^k(\mu)$. Для любой функции $v \in H^1$ имеем

$$\int\limits_{R^2} (\nabla u^k(\mu) \cdot \nabla v + \mu u^k(\mu) v)\, dx = \lambda \int\limits_{R^2} \varepsilon u^k(\mu) v\, dx.$$

Используя теорему 1 и единственность метагармонического продолжения, стандартными рассуждениями доказывается следующая

Теорема 3 *Собственные функции $u^k(\mu)$, соответствующие различным собственным числам $\lambda_k(\mu)$ ортогональны:*

$$\int\limits_{R^2} \varepsilon u^k(\mu) u^m(\mu)\, dx = 0.$$

Если $\lambda_{k-1}(\mu) < \lambda_k(\mu) = \lambda_{k+1}(\mu) = \ldots = \lambda_{k+m-1}(\mu) < \lambda_m(\mu)$, то собственные функции $u^i(\mu)$, $i = k, \ldots, k+m-1$, могут быть выбраны ортонормированными.

5 Определение приближенного решения

Прежде чем определить дискретизацию задачи (P_2), опишем предварительно аппроксимацию пространств V и $V_\Gamma = W_2^{1/2}(\Gamma)$. Для этого окружность Γ разобьем на n_Γ равных частей длины h:

$$\gamma_i = \{(R, \varphi) : \phi_i < \varphi < \phi_{i+1}\}, \quad i = 1, \ldots, n_\Gamma, \quad \phi_{n_\Gamma + 1} = \phi_1.$$

Ломанную, полученную соединением соседних узлов на Γ, обозначим через Γ_h. Далее, область Ω разобьем на треугольники τ максимального диаметра h так, чтобы два соседних треугольника имели либо общую сторону, либо общую вершину. Множество всех полученных треугольников обозначим через T_h. Будем считать, что

$$\Omega_h = \bigcup_{\tau \in \mathrm{T}_h} \tau \subset \Omega, \quad \partial\Omega_h = \Gamma_h.$$

Множество вершин треугольников из T_h будем называть узлами сетки. Общее число узлов обозначим через n, через n_Ω – число внутренних узлов, пронумерованных после граничных.

Пусть V_Γ^h – множество непрерывных на Γ функций, линейных на каждом элементе γ_i. Базис Лагранжа в нем обозначим через $\{\psi_i, i = 1, ..., n_\Gamma\}$. Таким образом,

$$u^h = \sum_{i=1}^{n_\Gamma} u_i \psi_i \quad \forall u^h \in V_\Gamma^h. \tag{12}$$

Пусть, далее, V_h – множество непрерывных в области Ω_h функций, линейных на каждом конечном элементе $\tau \in \mathrm{T}_h$. Базис Лагранжа в нем обозначим через $\{\varphi_i, i = 1, ..., n\}$, так что

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i \quad \forall u_h \in V_h. \tag{13}$$

Отметим, что функции u_h и u^h совпадают в граничных узлах сетки, и u^h однозначно определяется по u_h.

Определим операторы, действующие в R^n:

$$\langle A_0^{hm} u, v \rangle = \int_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx + \sum_{n=1}^{m} n \left(a_n(u^h) a_n(v^h) + b_n(u^h) b_n(v^h) \right),$$

$$\langle S^{hm}(\sigma) u, v \rangle = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{m}}{}' D_n(\sigma) \left(a_n(u^h) a_n(v^h) + b_n(u^h) b_n(v^h) \right),$$

$$D_n(\sigma) = \sigma R \frac{K_{n-1}(\sigma R)}{K_n(\sigma R)}, \quad n \geq 1, \quad D_0(\sigma) = \sigma R \frac{K_1(\sigma R)}{K_0(\sigma R)},$$

$$\langle B_0^h u, v \rangle = \int_{\Omega_h} u_h v_h dx, \quad \langle B^h u, v \rangle = \int_{\Omega_h} \varepsilon u_h v_h dx,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническое скалярное произведение в R^n, u, v – вектора узловых параметров длины n с компонентами u_i, v_i; функции u^h, v^h, u_h, v_h определяются согласно формулам (12), (13).

Сформулируем теперь дискретный аналог задачи (P_2): *найти все такие пары $(\mu, \lambda_h) \in \Lambda$, при которых существуют нетривиальные решения задачи*

$$(P_2^h) \quad A_\mu^{hm}(\lambda_h)u = \lambda_h B^h u, \quad A_\mu^{hm}(\lambda_h) = A_0^{hm} + \mu B_0^h + S^{hm}(\sigma_h), \quad \sigma_h = \sqrt{\mu - \lambda_h \varepsilon_\infty}.$$

Величина m в определении приближенного решения является дополнительным параметром и выбирается из соображений точности решения.

Отметим, что матрицы B^h, B_0^h и матрица, соответствующая первому слагаемому в определении матрицы A_0^{hm}, являются обычными для метода конечных элементов.

Укажем способ вычисления матрицы S^{hm}, имеющей вид

$$S^{hm}(\sigma) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \{g_{ij}(\sigma)\}_{i,j=1}^{n_\Gamma},$$

$$g_{ij}(\sigma) = \sum_{n=0}^{m}{}' D_n(\sigma)\left(a_n(\psi_i)a_n(\psi_j) + b_n(\psi_i)b_n(\psi_j)\right).$$

Для этого введем матрицы $D(\sigma) = diag(0.5D_0(\sigma), D_1(\sigma), ..., D_m(\sigma))$,

$$Q_a = \{a_j(\psi_i), i = 1, ..., n_\Gamma, j = 0, ..., m\},$$

$$Q_b = \{b_j(\psi_i), i = 1, ..., n_\Gamma, j = 0, ..., m\}.$$

Тогда, очевидно, $G = Q_a D(\sigma) Q_a^T + Q_b D(\sigma) Q_b^T$. Элементы прямоугольных матриц Q_a и Q_b легко вычисляются по явным формулам и не зависят от параметров λ и μ. Аналогичные формулы справедливы и для соответствующей составляющей в определении A_0^{hm}.

Простые оценки погрешности аппроксимации показывают, что для обеспечения точности, свойственной линейным конечным элементам, величина m должна выбираться порядка $\ln(n_\Gamma)$. Таким образом, вычисление матрицы G, а с нею и матриц $S^{hm}(\sigma)$ и $A_\mu^{hm}(\lambda)$ при заданных μ, λ, может быть проведено экономично. Отметим также, что при естественной нумерации узлов сетки, матрицы $A_\mu^{hm}(\lambda)$ и B^h являются ленточными с одинаковой шириной ленты.

Использованный способ аппроксимации позволяет легко доказать аналог леммы 2 для операторов дискретной задачи. Обозначим через μ_k^h собственные числа задачи

$$A_0^{hm} u = \mu^h C^h u, \quad C^h = \frac{1}{\varepsilon_\infty} B^h - B_0^h,$$

являющиеся аппроксимациями точек отсечки, занумерованные с учетом кратности:

$$0 = \mu_1^h < \mu_2^h \leq \mu_3^h \leq \dots \leq \mu_n^h, \mu_n^h \to \infty, h \to 0.$$

Для $\mu > 0$ определим целочисленную функцию – приближение $n(\mu)$:

$$n^h(\mu) = \max\{k : \mu_k^h < \mu\}.$$

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 1 *Пусть h достаточно мало. Тогда для любого $\mu > 0$ задача (P_2^h) имеет ровно $n^h(\mu)$ решений $(\mu, \lambda_i^h(\mu), u_i^h(\mu))$,*

$$\lambda_-(\mu) < \lambda_1^h(\mu) \leq \lambda_2^h(\mu) \leq \dots \leq \lambda_{n^h(\mu)}^h(\mu) < \lambda_+(\mu).$$

Если $\lambda_{k-1}^h(\mu) < \lambda_k^h(\mu) = \lambda_{k+1}^h(\mu) = \dots = \lambda_{k+m-1}^h(\mu) < \lambda_{k+m}^h(\mu)$, то собственные функции $u_i^h(\mu)$, $i = k, \dots, k+m-1$, могут быть выбраны ортонормированными. Каждое число $\lambda_h = \lambda_k^h(\mu)$, $k \geq 1$, является единственным корнем уравнения

$$\lambda_h = f_k(\lambda_h), \quad \lambda_h \in \Lambda, \tag{14}$$

$$f_k(\lambda_h) = \min_{H_k \subset R^n} \max_{v \in H_k} \frac{\langle A_0^{hm} u + \mu B_0^h u + S^{hm}(\sigma_h) u, u \rangle}{\langle B^h u, u \rangle}.$$

При всех $k \geq 1$ дисперсионные кривые $\lambda = \lambda_k^h(\mu)$, определенные на (μ_k^h, ∞), являются липшицевыми, возрастающими функциями.

6 Вычисление собственных значений дискретной задачи

Для приближенного решения дискретной задачи, которую при фиксированном μ запишем в виде $A(\lambda)u = \lambda Bu$, $\lambda \in \Lambda$, можно использовать методы общего назначения (см., напр., обзор [23] и цитированную там литературу). Однако, с нашей точки зрения, эти методы недостаточно эффективны для рассматриваемой нами задачи, характерная особенность которой заключена в симметричности задачи и монотонности оператора $A(\lambda)$ по параметру λ.

Для задач сравнительно небольшой размерности полезными могут оказаться следующие методы.

а) **Метод, основанный на решении уравнений** (см. (14)): $\lambda = f_k(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ для нахождения k-того собственного значения. Для вычисления функции $f_k(\lambda)$ при заданном λ в этом случае необходимо отыскивать k-тое собственное значение γ_k (и собственную функцию u_k) обычной спектральной задачи $A(\lambda)u = \gamma Bu$. Отметим, что функции $f_k(\lambda)$ являются дифференцируемыми и монотонно убывающими. После отыскания корня λ_k с требуемой точностью, пара (γ_k, u_k), будет искомой собственной парой.

б) **Метод бисекции** (алгоритм деления спектра) основан на следующей теореме [24].

Теорема 1 *Количество собственных значений задачи (P_2^h), меньших чем $\mu \in \Lambda$, совпадает с числом отрицательных элементов $\nu(D(\mu))$ диагональной матрицы $D(\mu)$ в разложении*

$$A(\mu) - \mu B = L(\mu)D(\mu)L^T(\mu) \tag{15}$$

с нижней треугольной матрицей $L(\mu)$, имеющей единичные диагональные элементы.

Разложение (15) может быть получено методом Гаусса. Умения вычислять функцию $\nu(D(\mu))$ достаточно, чтобы воспользоваться программой BISECT [25] для определения всех собственных чисел задачи (P_2^h).

7 Численные эксперименты

Приведем результаты численного решения ряда конкретных спектральных задач.

Хорошо известно аналитическое решение задачи (1), (2) для однородного волновода кругового поперечного сечения [2]. Мы использовали этот случай в качестве тестового примера. Для

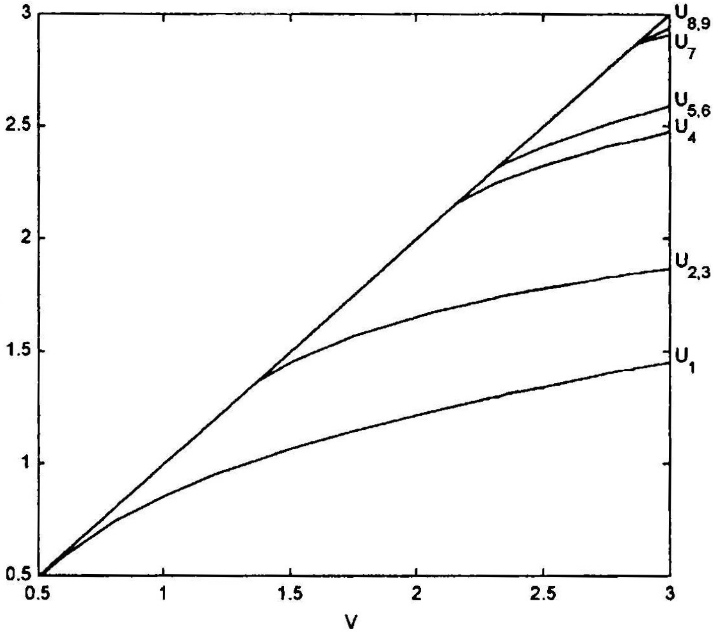

Рис. 1: Дисперсионные кривые девяти мод волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения

волновода, радиус которого равен 1, $\varepsilon_+ = 2$, $\varepsilon_\infty = 1$, уравнение имеет единственный корень $\mu/\lambda = 1.04095$. Мы вычисляли приближенные значения μ/λ при различном числе узлов сетки n при $R = 1$. Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Зависимость δ от h аппроксимируется формулой $\delta = 0.027h^2$. Здесь h – максимальный размер элементов, δ – абсолютная ошибка вычисления μ/λ. Мы проводили расчеты при разном числе слагаемых в ряде Фурье, $m = 1, ..., 20$. Ошибка вычислений в данном эксперименте от величины m не зависела.

Мы рассчитывали также различные волноведущие структу-

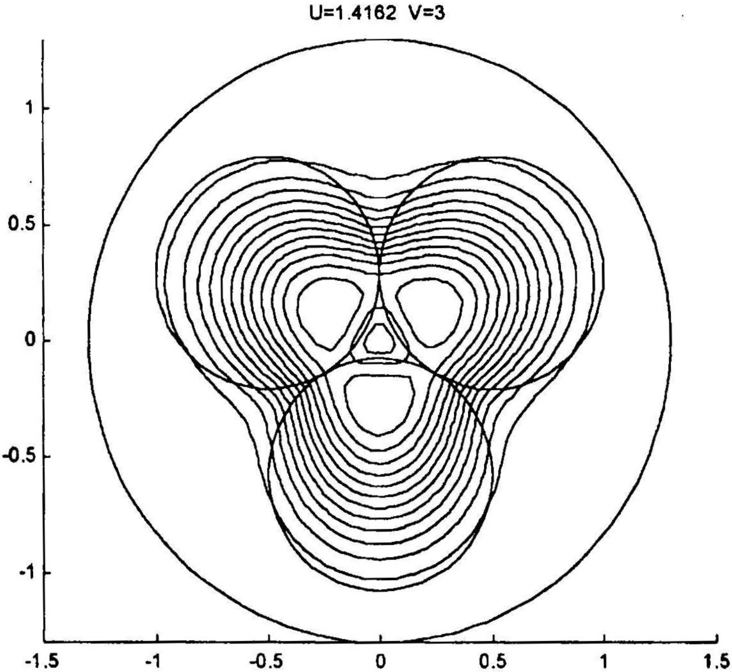

Рис. 2: Линии уровня квадрата основной собственной функции волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения

Таблица 1: Зависимость погрешности от числа узлов

n	25	81	289	1089	4225
h	0.39270	0.19635	0.09817	0 .04909	0.02454
δ	4.3306e-3	1.0683e-3	2.6245e-4	6.5726e-5	1.6461e-5

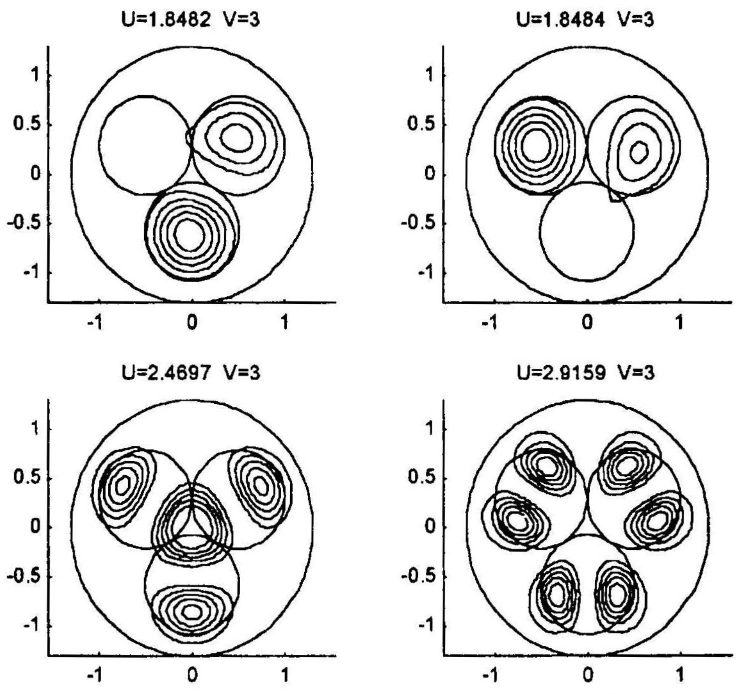

Рис. 3: Линии уровня квадратов собственных функций высшего порядка волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения

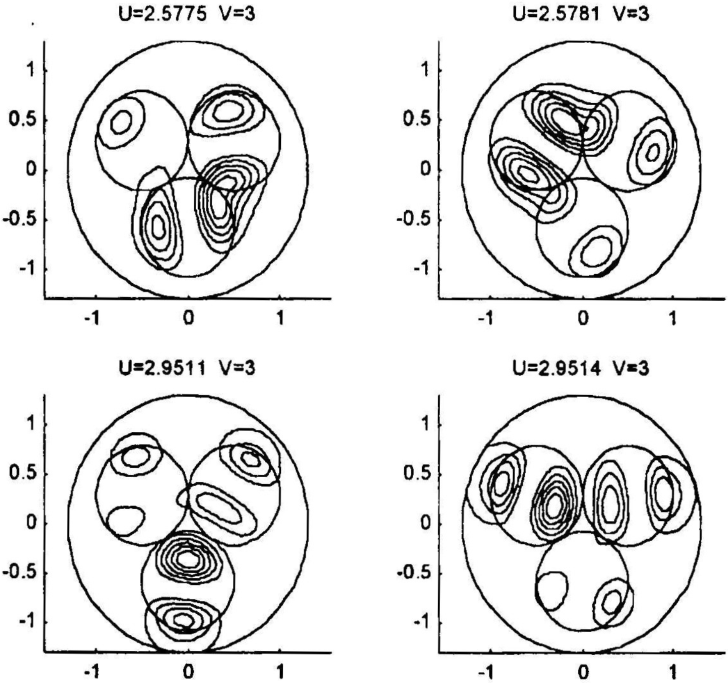

Рис. 4: Линии уровня квадратов собственных функций высшего порядка волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения

ры. В том числе, однородные волноводы прямоугольного и треугольного поперечного сечения, волноводы кругового поперечного сечения с диэлектрической проницаемостью, изменяющейся по квадратичному закону. Результаты сравнивались с данными из работ [2], [26], [27], полученными различными приближенными методами. Во всех случаях наблюдалось хорошее согласование результатов.

Для иллюстрации работоспособности предлагаемого метода приведем результаты расчетов для волновода, состоящего из трех касающихся друг друга параллельных круговых волокон с центрами в вершинах равностороннего треугольника с длиной стороны ρ. Радиус окружности $\Gamma = 1.3\rho$. Вычислялись $U = \rho\sqrt{\lambda(\varepsilon_+ - \mu)}$ при фиксированных $V = \rho\sqrt{\lambda(\varepsilon_+ - \varepsilon_\infty)}$. Наблюдалась устойчивая сходимость метода по параметрам n и m. Ниже в таблице 2 приведены два значения U, из найденных 9, при $V = 3$, $n = 268$, $h = 0.2$ и различных $m = 1, ..., 21$. Следующая таблица 3

Таблица 2:

m	1	7	14	21
U_1	1.4524	1.4540	1.4540	1.4540
U_9	2.9242	2.9363	2.9363	2.9363

показывает зависимость параметра U для девятой моды от числа узлов n и максимального h. Вычисления проводились при $V = 3$, $m = 7$: На рисунке 1 построены дисперсионные кривые, показы-

Таблица 3:

n	188	268	436	954	1660	2570
h	0.25	0.2	0.15	0.1	0.075	0.06
U_9	2.9212	2.9363	2.9397	2.9493	2.9514	2.9520

вающие зависимость U от V для первых девяти мод. Вычисления проводились при $n = 268$, $h = 0.2$, $m = 7$. Дисперсионные кривые для U_2 и U_3, U_5 и U_6, U_8 и U_9 совпали с графической точностью. Соответствующие собственные значения являются кратными.

На рисунках 2 – 4 построены линии уровня квадратов собственных функций в расчетной области Ω для $V = 3$. Вычисления проводились при $n = 1660$, $h = 0.075$, $m = 7$.

Литература

[1] Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н., Шатров А.Д. Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения (обзор) // Радиотехн. и электроника. – 1979. – Т.24, №7. – С.1245–1263.

[2] Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. – М.: Радио и связь, 1987.

[3] Клеев А.И., Маненков А.Б., Рожнев А.Г. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Частные методы (обзор) // Радиотехн. и электроника. – 1993. – Т.38, №5. – С.769–788.

[4] Клеев А.И., Маненков А.Б., Рожнев А.Г. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Универсальные методики (обзор) // Радиотехн. и электроника. – 1993. – Т.38, №11. – С.1938–1968.

[5] Карчевский Е.М. Исследование спектра собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов с малым скачком показателя преломления // Иссл. по прикладной математике. Казань: Изд-во Казанск. мат. об-ва, 1997. Вып. 22. – С.47–51.

[6] Карчевский Е.М. Об определении постоянных распространения собственных волн диэлектрических волноводов методами теории потенциала // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т.38, №1. – С.136–140.

[7] Карчевский Е.М. Исследование численного метода решения спектральной задачи теории диэлектрических волноводов // Изв. вузов. Математика. – 1999. – №1. – С.10-17.

[8] Givoli D. Non-reflecting boundary conditions // A review: J. Comput. Phys. – 1991. – №94. – P.1–29.

[9] Brezzi F., Johnson C. On the coupling of boundary integral and finite element methods // Estratto da Colcolo. - 1979. - Vol. XVI, №11.

[10] MacCamy, Marin S.P. A finite element method for exterior interface problems // Int. J. Math. Sci. - 1980. - №3. - P.311-350.

[11] Goldstein C.I. A finite element method for solving Helmholtz type equations in wave guides and other unbounded domains // Math. Comput. - 1982. - №39. - P.309–324.

[12] Кузнецов С.Б. Комбинирование метода конечных элементов с методом граничных интегральных уравнений // В сб.: Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа. — ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1987.

[13] Gregus M., Khoromsky B.N., Mazurkevich G.E., Zhidkov E.P. Combined algorithms in nonlinear problems of magnetostatics // Communication JINR, E11-88-481. 1988.

[14] Keller J.B., Givoli D. Exect non-reflecting boundary conditions // J. Comput. Phys. - 1989. - №82. - P.172–192.

[15] Bamberger A., Bonnet A.S. Mathematical Analisis of the Guided Modes of an Optical Fiber // SIAM J. Math. Anal. - 1990. - Vol.21, №6. - P.1487–1510.

[16] Bonnet-Ben Dhia A.S., Joli P. Mathematical Analisis of Guided Water Waves // SIAM J. Appl. Math. - 1993. - Vol.53, №6. - P.1507-1550.

[17] Сухинин С.В. Собственные колебания около пластины в канале // Прикл. мех. и тех. физ. - 1998. - Т.39, №2. - С.78–90.

[18] Векуа И.Н. О метагармонических функциях // Труды Тбилисского Матем. ин-та. - 1943. - Т.12. - С.105–174.

[19] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. - М.: Мир, 1972.

[20] Крегжде А.В. Об одном алгоритме решения нелинейной разностной задачи Штурма- Лиувилля. // Вестник МГУ. Сер. выч. мат. и киб. - 1982. - №2. - С.3-8.

[21] Даутов Р.З., Ляшко А.Д., Соловьев С.И. Сходимость метода Бубнова-Галеркина с возмущениями для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Диф. уравн. - 1991. - Т. 27, №7. - С.1144-1153.

[22] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. - М.: Мир, 1972.

[23] Goolin A.V., Kartyshov S.V. Numerical study of stability and nonlinear eigenvalue problems. // Surv. Math. Ind. - 1993. - V.3. - P.29-48.

[24] Dautov R.Z., Lyashko A.D., Solov'ev S.I. The bisection method for symmetric eigenvalue problems with parameter entering nonlinearily // Rus. J. Numer. Analys. Math. Modelling. - 1994. - V.9, №5. - P.417-427.

[25] Уилкинсон Дж. Х., Райнш К.Х. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. - М.: Машиностроение, 1976.

[26] Eyges L., Gianino P., Wintersteiner P. Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape // J. Opt. Sos. Am. - 1979. - Vol.69, №9. P.1226-1235.

[27] Keuster E.F., Pate R.C. Fundamental mode propagation on dielectric fibres of arbitrary cross-section // IEE PROC-H. - 1980. - V.126, №1. - P.41-47.